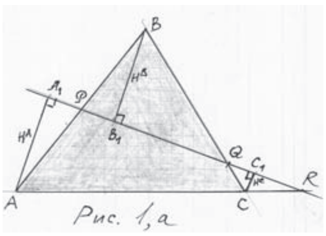
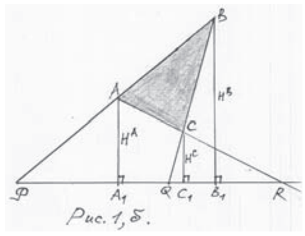
Во многих геометрических задачах задается отношение длин отрезков. В решении таких задач часто полезна теорема Менелая.

От задачи к задаче:

Теорема Менелая

Пусть имеются треугольник ABC и прямая a, пересекающая прямые AB, BC, CA в точках P, Q, R соответственно (прямая a не содержит вершин треугольника) (рисунки 1а, 1б).





Тогда

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=1\ (*)$$

Доказательство

1) Проведем из вершин треугольника ABC перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1 на прямую a. Обозначим длины этих перпендикуляров как H^A, H^B, H^C.

2) $\Delta APA_1 \sim \Delta BPB_1$ (как прямоугольные, имеющие равные углы APA_1 и BPB_1).

Из этого следует:

$$\frac{AP}{PB}=\frac{H^A}{H^B}.\ (1)$$

3) $\Delta BQB_1 \sim \Delta CQC_1$:

$$\frac{BQ}{QC}=\frac{H^B}{H^C}.\ (2)$$

4) $\Delta CRC_1 \sim \Delta ARA_1$:

$$\frac{CR}{RA}=\frac{H^C}{H^A}.\ (3)$$

5) Перемножив почленно равенства (1), (2), (3), получим равенство (*).

Замечания

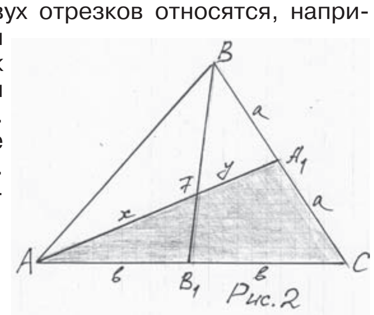
1) При записи формулы (*) можно выходить из любой вершины в любом направлении, двигаясь по сторонам треугольника и возвращаясь в ту же вершину. Прямую PQ будем называть секущей.

2) Для успешного применения теоремы Менелая нужно найти соответствующие преугольник и секущую. При этом удобна следующая запись:

$A \to B \to C \to A$,
P Q R

задающая "маршрут движения".

3) Пусть длины двух отрезков относятся, например, как 3:4. Будем это записывать как 3a:4a, где a – общая мера длины отрезков. Искомое отношение обозначим как x : y. Эти числа будем показывать на рисунках.



Пример

В треугольнике ABC медианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке F (рис.2). Докажите:

а) $AF : FA_1 = 2:1$;
б) $BF : FB_1 = 2:1$.

Решение

Применим теорему Менелая для ΔAA_1C и секущей BB_1:

$A \to A_1 \to C \to A$
F B B_1

Тогда

$$\frac{AF}{FA_1}\cdot\frac{A_1B}{BC}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1,$$

$$\frac{x}{y}\cdot\frac{a}{2a}\cdot\frac{b}{b}=1,\ \frac{x}{y}=\frac{2}{1}.$$

Аналогично докажем, что $BF : FB_1 = 2 : 1$.

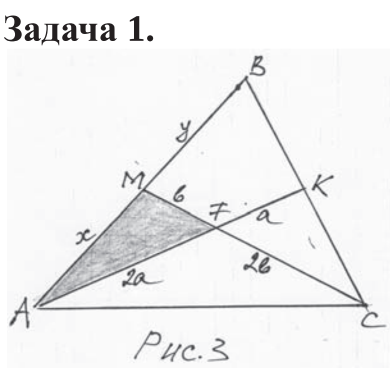
Замечание

Оставляя одну из медиан и подключая третью, мы докажем известный факт: в любом треугольнике медианы точкой пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершин.

Рассмотрим решения нескольких задач

Задача 1.

Точки K и M расположены на сторонах BC и AB треугольника ABC соответственно. Отрезки AK и CM пересекаются в точке F и $AF : FK = 2:1$, $CF : FM = 2:1$. Найдите отношение AM : MB (рис.3)



Решение

Применим теорему Менелая для треугольника AMF и секущей BC:

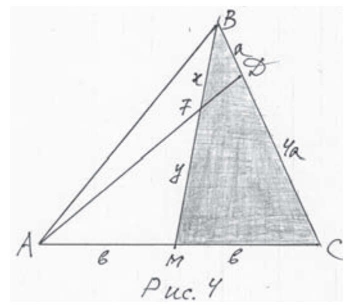
$A \to M \to F \to A$
B C K,

$$\frac{AB}{BM}\cdot\frac{MC}{CF}\cdot\frac{FK}{KA}=1,$$

$$\frac{x+y}{y}\cdot\frac{3b}{2b}\cdot\frac{a}{3a}=1$$

$$\frac{x}{y}+1=2,\ x:y=1:1$$

Ответ: 1:1.



Замечание

Аналогично получим, что BK : KC = 1 : 1.

Задача 2.

В треугольнике ABC BM – медиана, точка $D \in BC$, BD : DC = 1 : 4.

Прямая AD пересекает BM в точке F.

Найдите отношение BF : FM. (рис. 4)

Решение

Применим теорему Менелая к треугольнику MBC и секущей AD:

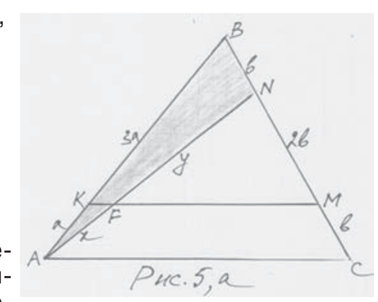
$B \to M \to C \to B$,
F A D

$$\frac{BF}{FM}\cdot\frac{MA}{AC}\cdot\frac{CD}{DB}=1,$$

$$\frac{x}{y}\cdot\frac{b}{2b}\cdot\frac{4a}{a}=1,$$

$$\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$$

Ответ: 1:2.



Задача 3.

На стороне AB треугольника ABC взята точка K, на стороне BC — точки M и N так, что AB = 4AK, CM = BN, MN = 2BN, F — точка пересечения прямых AN и KM.

Найдите: а) AF : FN;
б) KF : FM.

Решение

1) Решим задачу а) (рис. 5, а).

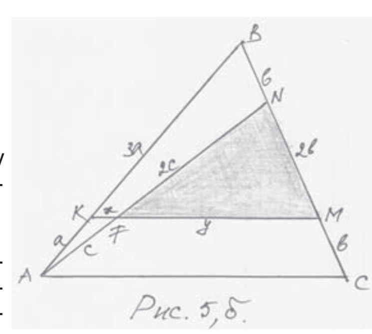
Применим теорему Менелая для треугольника ABN и секущей KM:

$A \to N \to B \to A$,
F M K

$$\frac{AF}{FN}\cdot\frac{NM}{MB}\cdot\frac{BK}{KA}=1,$$

$$\frac{x}{y}\cdot\frac{2b}{3b}\cdot\frac{3a}{a}=1,$$

$x : y = 1:2$.



2) Решим задачу б), используя результат задачи а) (рис. 5, б).

Применим теорему Менелая для треугольника FMN и секущей AB:

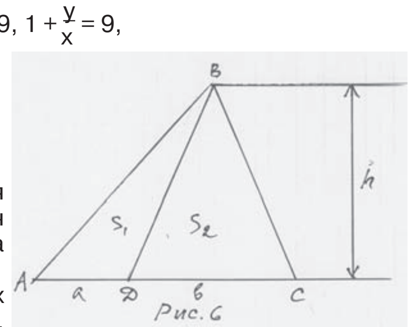
$F \to M \to N \to F$,
K B A

$$\frac{x}{x+y}\cdot\frac{3b}{b}\cdot\frac{3c}{c}=1,$$

$$\frac{x}{x+y}=\frac{1}{9},\ \frac{x+y}{x}=9,\ 1+\frac{y}{x}=9,$$

$$\frac{y}{x}=8,\ \frac{x}{y}=\frac{1}{8}.$$

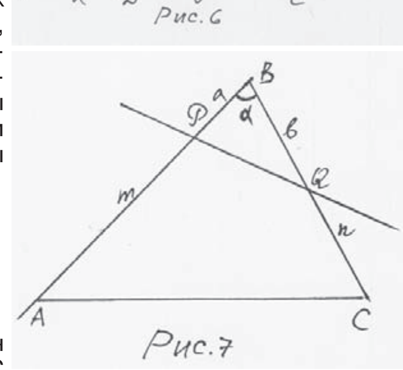
Ответ:
а) 1:2; б) 1:8.



Для решения следующих задач понадобятся два факта.

1. Площади двух треугольников, имеющих одинаковую высоту, относятся как длины сторон, к которым проведены высоты (рис. 6).

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}a\cdot h}{\frac{1}{2}b\,h}=\frac{a}{b}.$$



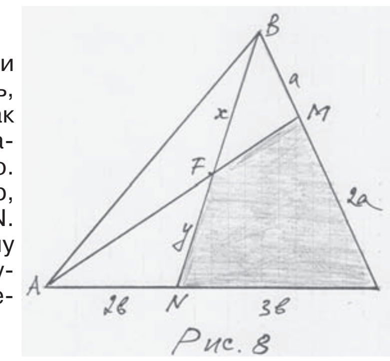
2. (Рис. 7.) Дан треугольник ABC и секущая PQ. Пусть: BP = a, BQ = b, AP = m, CQ = n, $\angle B = \alpha$.

Тогда

$$\frac{S_{BPQ}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{1}{2}ab\sin L}{\frac{1}{2}(a+m)\cdot(b+n)\,\mathrm{Sin}L}=\frac{ab}{(a+m)(b+n)}.$$

Задача 4.

В треугольнике ABC точка $M \in BC$, BM : MC = 1 : 2, точка $N \in AC$, AN : NC = 2 : 3, $AM \cap BN = F$. $S_{ABC} = Q$. Найдите S_{MFNC} (рис. 8).



Решение

1) Чтобы найти искомую площадь, нужно знать как точка F делит какую-либо секущую. Найдем, например, отношение BF : FN. Применим теорему Менелая для треугольника BNC и секущей AM:

$B \to N \to C \to B$,
F A M

$$\frac{x}{y}\cdot\frac{2b}{5b}\cdot\frac{2a}{a}=1,\ \frac{x}{y}=\frac{5}{4}.$$

2) $\frac{S_{BNC}}{S_{ABC}}=\frac{3}{5}$, $S_{BNC}=\frac{3}{5}Q$

(факт 1)

3) $\frac{S_{BFM}}{S_{BNC}}=\frac{x\cdot a}{(x+y)(a+2a)}=\frac{5\cdot 1}{9\cdot 3}=\frac{5}{27}$

(факт 2).

$S_{BFM}=\frac{5}{27}S_{BNC}$, отсюда

$$S_{MFNC}=S_{BCN}-S_{BMF}=S_{BCN}-\frac{5}{27}S_{BNC}=\frac{22}{27}S_{BNC}=$$

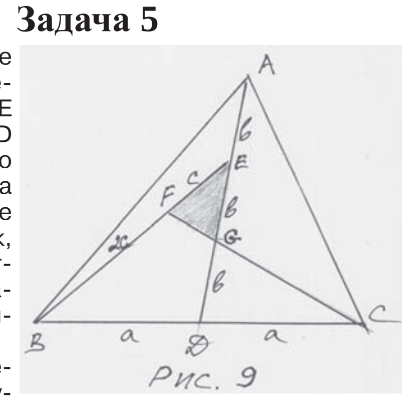
$$=\frac{22}{27}\cdot\frac{3}{5}Q=\frac{22}{45}Q.$$

Ответ: $\frac{22}{45}Q$.

Задача 5

В треугольнике ABC проведена медиана AD. Точка E лежит на отрезке AD и делит его так, что AE : ED = 1 : 2. Точка F лежит на отрезке BE и далит его так, что BF : FE = 2 : 1. Отрезок CF пересекает отрезок AD в точке G.

Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника FEG (рис. 9).



Решение

1) Применим теорему Менелая для треугольника ВДЕ и секущей CF:

$E \to D \to B \to E$,
G C F

$$\frac{EG}{GD}\cdot\frac{DC}{CB}\cdot\frac{BF}{FE}=1,$$

$$\frac{EG}{GD}\cdot\frac{a}{2a}\cdot\frac{2c}{c}=1,$$

$$\frac{EG}{GD}=1,\ EG : GD = 1:1.$$

Так как AE : ED = 1 : 2, то AE = EG = GD = b.

2) Пусть $S_{EFG} = q$.

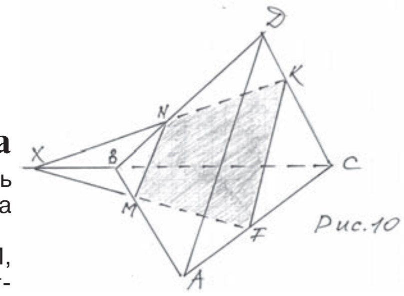
3) $\frac{S_{EFG}}{S_{EDB}}=\frac{c\cdot b}{3c\cdot 2b}=\frac{1}{6}$, $S_{EDB}=6q$.

4) $\frac{S_{EDB}}{S_{ADB}}=\frac{2b}{3b}=\frac{2}{3}$, $S_{ABD}=\frac{3}{2}S_{EDB}=\frac{3}{2}\cdot 6q=9q$

5) $S_{ABC}=2S_{ABD}=2\cdot 9q=18q$.

Ответ: 18 : 1.

Теорема Менелая для тетраэдра



Пусть плоскость L пересекает рёбра тетраэдра DABC в точках M, N, K, F (рис. 10) Тогда

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{ND}\cdot\frac{DK}{KC}\cdot\frac{CF}{FA}=1.\ (**)$$

Доказательство

Из всех вершин тетраэдра проведём перпендикуляры на секущую плоскость. Их длины обозначим так: H^A_α,

теорема Менелая

H^B_α, H^C_α, H^D_α. Схематично это можно представить так: (рис. 11). Тогда

$$\frac{AM}{MB}=\frac{H^A_\alpha}{H^B_\alpha}.$$

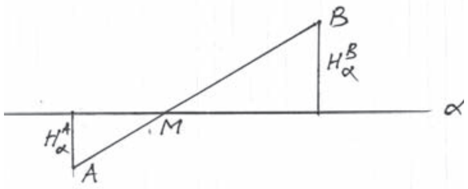


Рис. 11

Записав таким образом отношения из формулы (* *) и почленно их перемножив, получим данное утверждение (* *).

Замечания

1) Выйти можно из любой вершины тетраэдра в любом направлении. Идём по тем рёбрам, которым принадлежат вершины сечения.

2) Удобна следующая запись

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \to & B & \to & D & \to & C & \to & A, \\ & M & & N & & K & & F & \end{array}$$

от неё легко перейти к записи (* *).

Пример

Точки M, N, K взяты на рёбрах тетраэдра и делят их в известных отношениях (рис. 12).

Найдите в каком отношении плоскость MNK делит ребро AC.

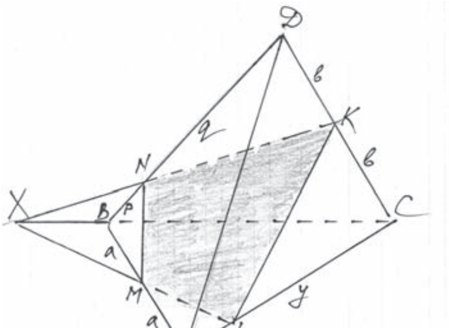


Рис. 12

Решение

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \to & C & \to & D & \to & B & \to & A, \\ & L & & K & & N & & M & \end{array}$$

$$\frac{x}{y}\cdot\frac{b}{b}\cdot\frac{q}{p}\cdot\frac{a}{a}=1,\quad \frac{x}{y}=\frac{p}{q}.$$

Ответ: p : q.

Задача 6

В тетраэдре ДАВС точки M, N, K принадлежат рёбрам AB, BD, DC соответственно и делят их в отношениях: AM : MB = 1:1, BN : ND = 1:3, DK : KC = 1:1.

В каком отношении сечение MNKL делит объём тетраэдра? (рис. 13).

Решение

1) Воспользуемся выше рассмотренным примером и найдём, что AL : LC = 1:3.

2) Введём следующие обозначения:

H^D_{ABC} = H — высота тетраэдра DABC;

S_{ABC} = Q — площадь грани ABC;

V_{DABC} = V — объём тетраэдра DABC;

Vза — объём части тетраэдра за секущей плоскостью;

Vперед — объём части тетраэдра перед секущей плоскостью.

3) Проведём отрезки NL и NC. Тогда часть тетраэдра за секущей плоскостью разобьётся на две пирамиды: NMBCL и NKCL.

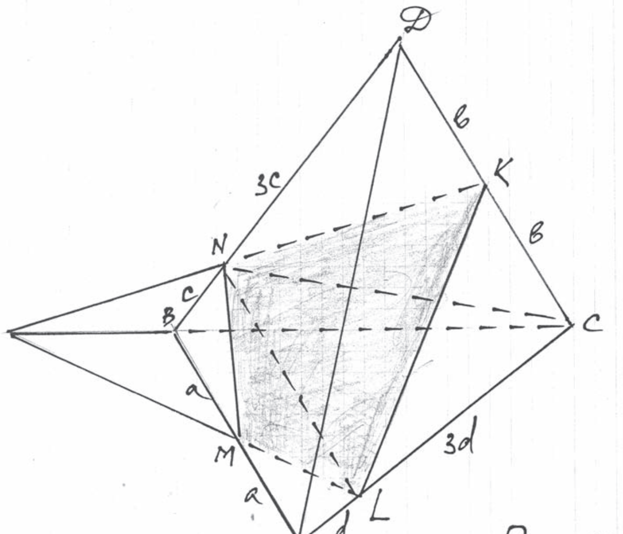


Рис. 13

$$V_{за}=V_{NMBCL}+V_{NKCL}.$$

4) $S_{AML}=\frac{1}{8}Q$, $S_{MBCL}=\frac{7}{8}Q$,

5) $\frac{H^N_{ABC}}{H^D_{ABC}}=\frac{c}{4c}=\frac{1}{4}$, $H^N_{ABC}=\frac{1}{4}H\cdot$

6) $V_{NMBCL}=\frac{1}{3}S_{MBCL}\cdot H^N_{ABC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{8}Q\cdot\frac{1}{4}H=$

$=(\frac{1}{3}QH)\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{4}=\frac{7}{32}V.$

7) Найдём объём пирамиды NKCL, приняв треугольник KCL за основание.

Обозначим:

$S_{ACD}=q$, $H^B_{ACD}=h$.

Тогда $V=\frac{1}{3}qh$.

8) $\frac{S_{CKL}}{S_{CAD}}=\frac{b\cdot 3d}{2b\cdot 4d}=\frac{3}{8}$, $S_{CKL}=\frac{3}{8}q$.

9) $\frac{H^N_{ACD}}{H^B_{ACD}}=\frac{3c}{4c}=\frac{3}{4}$, $H^N_{ACD}=\frac{3}{4}h$.

10) $V_{NKCL}=\frac{1}{3}S_{NKCL}\cdot H^N_{ACD}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}q\cdot\frac{3}{4}h=$

$=\left(\frac{1}{3}qh\right)\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{32}V.$

11) $V_{За}=\frac{7}{32}V+\frac{9}{32}V=\frac{16}{32}V=\frac{1}{2}V$.

12) $V_{перед}=V-\frac{1}{2}V=\frac{1}{2}V$.

Ответ: 1 : 1.

Замечание

Получен интересный факт: плоскость, проходящая через середины двух скрещивающихся рёбер тетраэдра, делит объём тетраэдра на две равновеликие части.

Задача 7. (ЦТ-18, В.1, А18.)

$ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, все рёбра которой равны 9. Точки P и K — середины рёбер BB_1 и AC соответственно, $M\in CC_1$, $C_1M : C_1C = 1 : 3$.

Найдите длину отрезка по которому плоскость KMP пересекает грань AA_1B_1B.

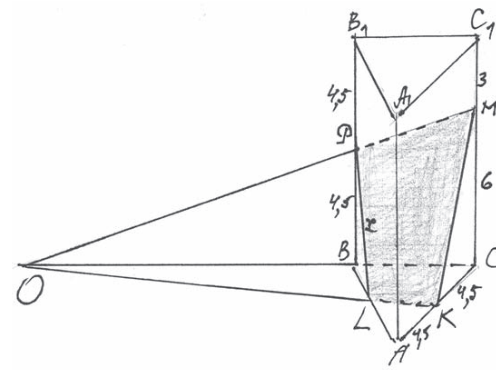


Рис. 14, а

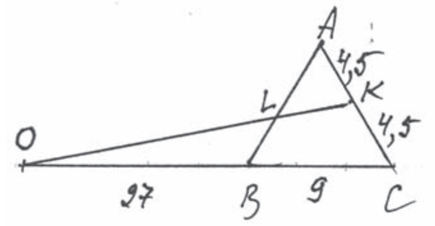


Рис. 14, б.

Решение

1) Рисунки 14,а и 14,б дадим без комментариев, они понятны.

2) Из подобия треугольников PBO и MCO имеем:

$$\frac{OB}{OC}=\frac{PB}{MC}=\frac{4,5}{6}=\frac{3}{4},$$

$OB=\frac{3}{4}OC$, $4OB = 3(OB+BC)$,

OB = 3BC, BC = 9, OB = 27.

3) Применим теорему Менелая к треугольнику ABC.

$$\frac{AL}{LB}\cdot\frac{OB}{OC}\cdot\frac{CK}{KA}=1,$$

$$\frac{AL}{LB}\cdot\frac{27}{36}\cdot\frac{1}{1}=1,\quad \frac{AL}{LB}=\frac{4}{3}.$$

Значит, $BL=\frac{3}{7}AB=\frac{3}{7}\cdot 9=\frac{27}{7}$.

4) Δ PBL :

$$PL^2=LB^2+BP^2=\left(\frac{27}{7}\right)^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{3^6}{49}+\frac{3^4}{4}=\frac{3^4\,(3^2\cdot 4+49)}{49\cdot 4}=$$

$$=\frac{3^4\cdot 85}{49\cdot 4},\quad PL=\frac{9\sqrt{85}}{14}.$$

Ответ: $\frac{9\sqrt{85}.}{14}$

Дополнительные задачи

1. Точки K и M расположены на сторононах AB и BC треугольника ABC, причём BK : KA = 1 : 4, BM : MC = = 3 : 2. Прямая MK пересекает прямую AC в точке N.

Найдите отношение AC : CN.

Ответ: 5 : 1.

2. В треугольнике ABC точка K на стороне AB и точка M на стороне AC расположены так, что AKKB = 3 : 2, AM : MC = 4 : 5. Найдите отношение, в котором прямая, проходящая через точку K паралельно стороне BC, делит отрезок BM.

Ответ: 18 : 7.

3. В треугольнике ABC точка M лежит на стороне BC расположена так, BL : CL = 2 : 5. Прямая, проходящая через точку L паралельно стороне AB, пересекает отрезок BM в точке O, причём BO : OM = 7 : 4.

Найдите отношения , в котором точка M делит сторону AC.

Ответ: 22 : 22.

4. Точки A_1 и C_1 находятся на сторонах BC и AB треугольника ABC. Отрезки AA_1 и CC_1 : пересекаются в точке M. $AC_1 : C_1B = 2 : 3$, $BA_1 : A_1C = 1 : 2$.

В каком отношении прямая BM делит сторону AC?

Ответ: 1 : 3, считая от точки A.

5. Точки A_1 и B_1 делят сторны BC и AC треугольника ABC в отношениях: $BA_1 : A_1C = 1 : p$, $AB_1 : B_1C = 1 : q$.

В таком тоношении отрезок AA1 делится отрезком BB_1?

Ответ: $\frac{p+1}{q}$.

6. В тетраэдре ДАВС точки M, L, K принадлежат рёбрам AB, AC, CD соответственно. При этом AM : MB = = 1 : 1, AL : LC = 2 :3, CK : КД = 4 : 3.

В каком отношениип плоскость MNK делит объём тетраэдра?

Ответ: 6 43 : 22.

Александр ФЕЛЬДМАН,
учитель математики средней школы № 19
имени Я.Купалы Минска.
Фото Ольги ДУБОВСКОЙ.