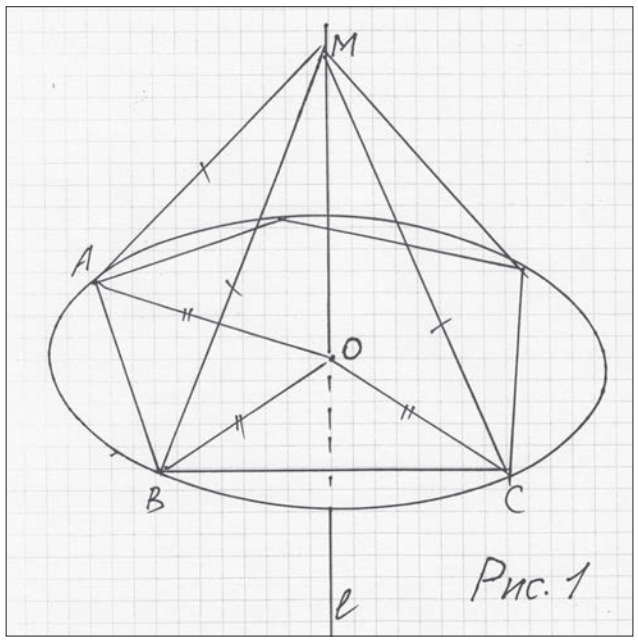
Шар и пирамида

В данной статье излагаются некоторые подходы к решению задач на комбинацию шара и пирамиды.

Отметим некоторые множества точек, полезных для дальнейших рассмотрений.

М1. Множество точек пространства, равноудалённых от вершин многоугольника, есть прямая, проходящая через центр окружности, описанной вокруг многоугольника, и перпендикулярная плоскости многоугольника. (Рис.1)

Иллюстрация



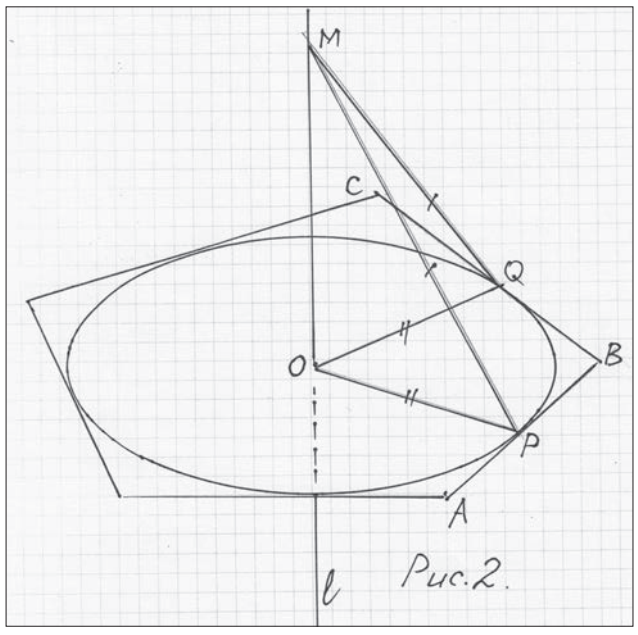
Замечание

Из указанного множества точек следует:

если в пирамиде боковые рёбра равны, или равнонаклонены к плоскости основания, то вершина пирамиды проецируется в центр окружности, описанной вокруг основания пирамиды.

М2. Множество точек пространства, равноудалённых от сторон многоугольника, есть прямая, перпендикулярная плоскости многоугольника и проходящая через центр окружности, вписанной в многоугольник. (Рис. 2)

Иллюстрация



Замечание

Из указанного множества точек следует:

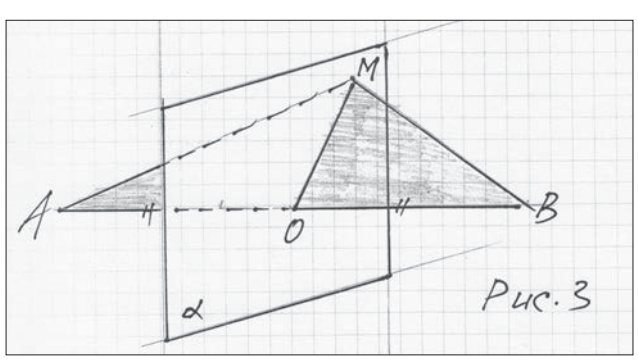
если в пирамиде боковые грани равнонаклонены к плоскости основания, то вершина пирамиды проецируется в центр окружности, вписанной в основание пирамиды и

$S_{б.пир.} = \frac{S_{осн.}}{\cos\alpha}$,

где α — угол наклона боковых граней к плоскости основания.

М3. Множество точек пространства, равноудалённых от концов отрезка, есть плоскость, перпендикулярная отрезку и проходящая через середину отрезка. (Рис. 3)

Иллюстрация



Назовём такую плоскость серединной плоскостью отрезка.

М4. Множество точек пространства, равноудалённых от граней двугранного угла, есть полуплоскость с границей на ребре двугранного угла и делящая его пополам.

Назовём такую полуплоскость биссектором двугранного угла.

Описанный шар

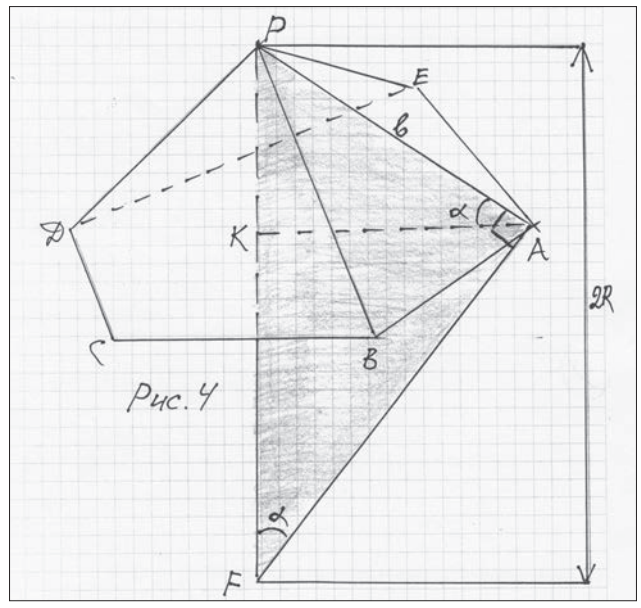
Определение. Шар называют описанным вокруг многогранника, если все вершины многогранника принадлежат поверхности шара.

Задача 1. Боковые рёбра пирамиды имеют длину b и наклонены к плоскости основания под углом α.

Найдите радиус шара, описанного вокруг пирамиды. (Рис. 4)

Решение:

1)



PABCD — пирамида,
PA =…= PD = b,
$\angle$(PA; ABC) = … = $\angle$ (PD; ABC) = α.

$R_{оп.ш.}$ —?

2) Заметим, что речь идёт о любой пирамиде, для которой выполнено данное условие.

3) Из М1 следует, что вершина P пирамиды проецируется в центр K окружности, описанной около основания пирамиды, PK — высота пирамиды.

4) Пусть прямая PK пересекает поверхность шара в точке F; тогда PF = 2R — диаметр шара, описанного вокруг пирамиды.

(**Замечание:** *если вокруг основания пирамиды можно описать окружность, то вокруг такой пирамиды можно описать шар.*)

5) Плоскость PAF пересекает шар по большому кругу. Угол PAF вписан в этот круг и опирается на диаметр. Следовательно, Δ PAF — прямоугольный.

6) $\angle$PFA = $\angle$PAF как углы, которые в сумме с углом FAK дают 90°; значит $\angle$PFA = α.

7) Δ PAF:

$b = 2R\sin\alpha$, $\quad R = \frac{b}{2\sin\alpha}$.

8) ΔPKA: пусть PK=h; тогда $\sin\alpha = \frac{h}{b}$.

Подставляя $\sin\alpha$ в формулу $R = \frac{b}{2\sin\alpha}$,

получим: $R = \frac{b^2}{2h}$. Ещё одна полезная формула.

Ответ: $R = \frac{b}{2\sin\alpha}$.

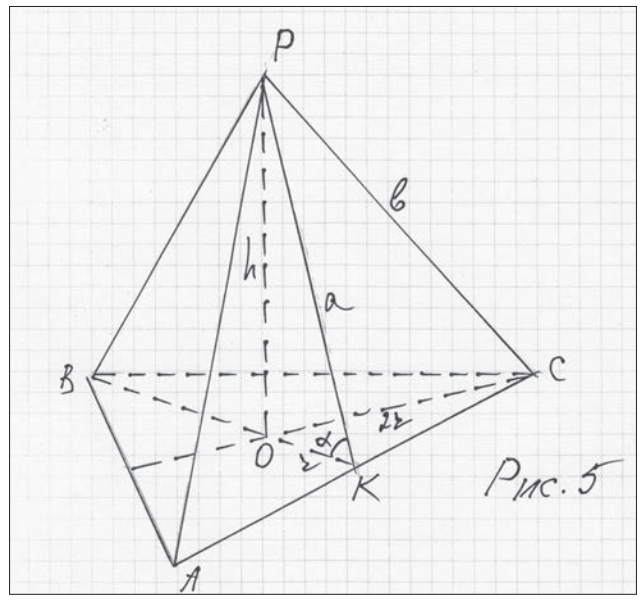
Задача 2 (геометрия 11, № 357).

В правильной 3-угольной пирамиде апофема равна a и составляет с плоскостью основания угол α.

Найдите радиус шара, описанного вокруг пирамиды. (Рис. 5)

Решение

1)



PABC — правильная пирамида,
PK = a — апофема пирамиды,
$\angle$(PK; ABC) = α.

$R_{оп.ш.}$ —?

2) Введём обозначения, показанные на рисунке.

3) Воспользуемся формулой $R = \frac{b^2}{2h}$.

4) ΔPOK: $h = a \cdot \sin\alpha$

$r = a \cdot \cos\alpha$,

5) $OC = 2r = 2a \cdot \cos\alpha$.

6) ΔPOC: $b^2 = h^2 + (2r)^2 = a^2\sin^2\alpha + 4a^2\cos^2\alpha = a^2(\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha)$.

7) $R = \frac{(a^2(\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha)}{2a\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha}{2\sin\alpha} a$.

Ответ: $\frac{\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha}{2\sin\alpha}$ a.

Замечание

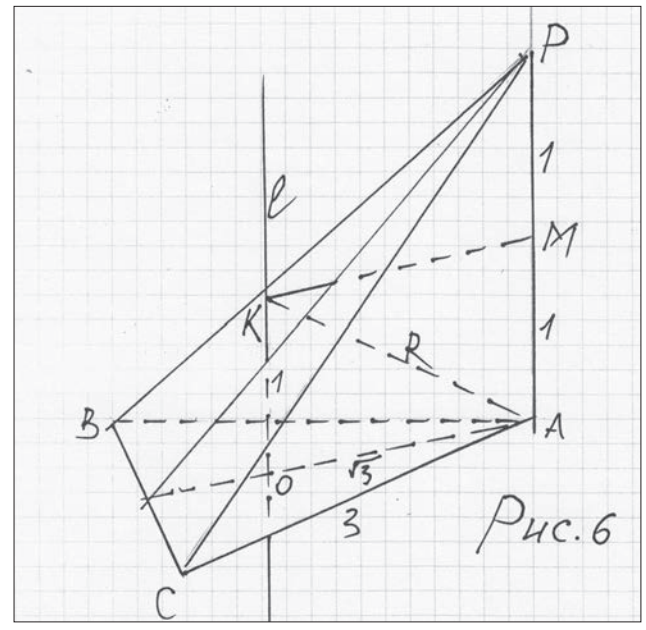
Если центр описанного шара не лежит на прямой, содержащей высоту пирамиды, то центр шара строим, используя множества точек М1 и М3.

Задача 3. Правильный треугольник со стороной 3 является основанием пирамиды. Одно из боковых рёбер перпендикулярно плоскости основания пирамиды и равно 2.

Найдите радиус описанного шара. (Рис. 6)

Решение:

1)



PABC — пирамида,
ΔABC — правильный,
PA$\perp$ABC,
AB = 3,
PA = 2.

$R_{оп.ш.}$ —?

2) Построим центр K описанного шара.

С одной стороны, K$\in$l — где l — прямая, перпендикулярная плоскости ABC и проходящая через центр O окружности, описанной вокруг ΔABC.

С другой стороны, K$\in\alpha$, где α — серединная плоскость ребра PA (на рисунке эта плоскость не показана; показана прямая MK, по которой пересекаются плоскости α и PAO).

l$\cap\alpha$ = K, AK = R — радиус описанного шара.

3) По теореме о двух параллельных плоскостях α и ABC (они перпендикулярны PA), пересечённых третьей плоскостью PAD, имеем:

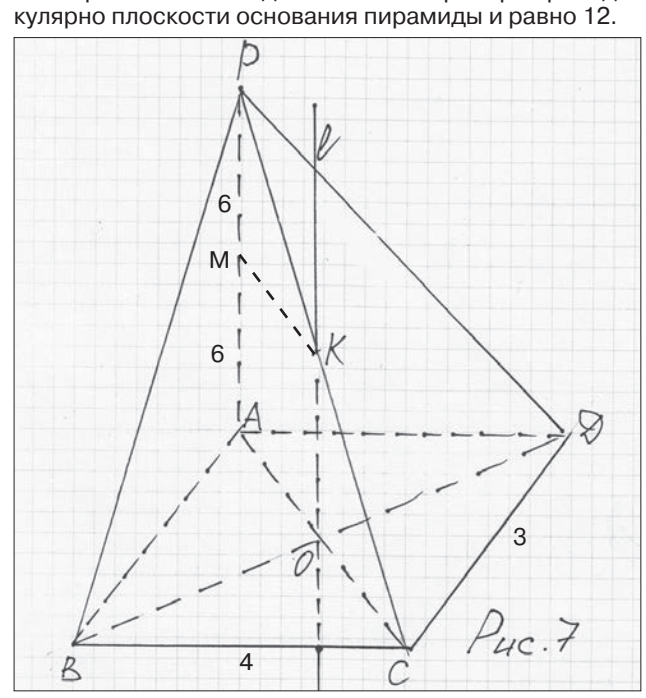
MK || AO.

4) AMKO — прямоугольник.

5) ΔAOK: $R = \sqrt{OK^2 + OA^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$.

Ответ: 2.

Задача 4. Основание пирамиды — прямоугольник со сторонами 3 и 4. Одно из боковых рёбер перпендикулярно плоскости основания пирамиды и равно 12.



Найдите радиус шара, описанного вокруг пирамиды (Рис. 7)

Решение:

Рассуждения понятны из рисунка: K — центр шара, PC — диаметр шара.

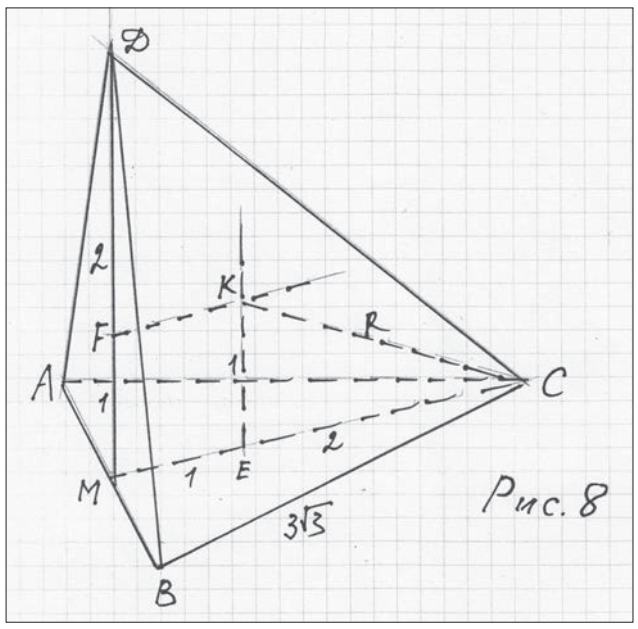
Ответ: 6,5.

Задача 5. Две грани 3-угольной пирамиды — правильные треугольники со стороной $3\sqrt{3}$. Плоскости этих треугольников перпендикулярны.

Найдите радиус шара, описанного вокруг пирамиды (Рис. 8)

Решение:

1)



DABC — пирамида,
ABC, ABD — правильные треугольники,
DAB⊥CAB,
$AB=3\sqrt{3}$.

$R_{оп.ш.}$ —?

2) Проведём медианы DM и MC, тогда ∠DMC=<90°.

3) E и F — центры правильных треугольников ABC и ABD соответственно.

4) С одной стороны, центр K описанного шара лежит на прямой EK⊥ABC; с другой стороны, центр K шара лежит на прямой FK⊥ABD. Прямые EK и FK лежат в плоскости DMC и точка K точка их пересечения, KC = R — радиус шара.

5) $EC = FD = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3$,

KE = FM =1, EC = 2.

6) $\Delta KEC: R = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$.

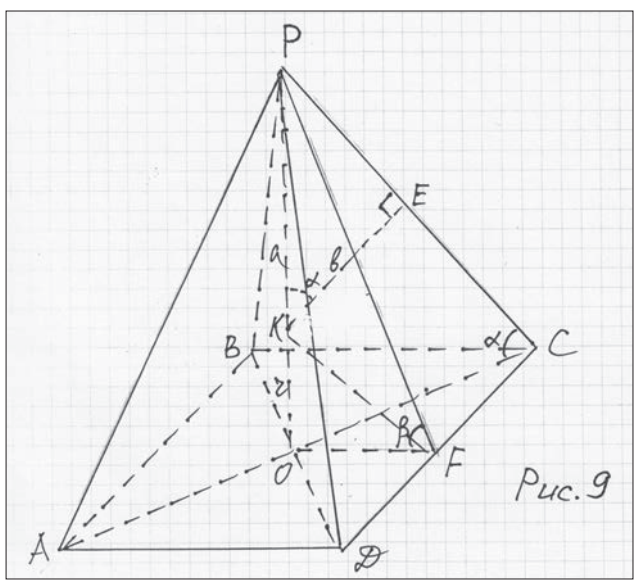
Ответ: $\sqrt{5}$.

Задача 6. Вокруг шара описана правильная четырёхугольная пирамида. Расстояние от центра шара до вершины пирамиды равно a, до бокового ребра — b.

Найдите радиус шара. (Рис. 9)

Решение:

1)



PABCD — правильная пирамида, K — центр вписанного шара,
PK=a,
KE⊥PC,
KE= b.

$r_{вп.ш.}$ —?

2) Проведём апофему PF и отрезок OF.

3) Обозначим: $\angle OCP = \alpha$, $\angle OFP = \beta$.

4) $\angle PKE = \angle OCP = \alpha$, так как каждый из них в сумме с углом OKE даёт 180°.

5) По теореме о биссектрисе угла треугольника имеем:

$\frac{r}{a} = \frac{OF}{FP} = \cos\beta$.

6) $\Delta PKE: \cos\alpha = \frac{b}{a}$.

7) Найдём $\cos\beta$.

$\Delta POC: PO = OC \cdot \operatorname{tg}\alpha$,

$\Delta POF: PO = OF \cdot \operatorname{tg}\beta$,

$OC \cdot \operatorname{tg}\alpha = OF \cdot \operatorname{tg}\beta$,

$\operatorname{tg}\beta = \frac{OC}{OF} \cdot \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$.

8) $1+\operatorname{tg}^2\beta = \frac{1}{\cos^2\beta}$

$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}} = \frac{1}{\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2\alpha}}$.

9) $\Delta PKE: \operatorname{tg}\alpha = \frac{PE}{EK} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$.

10) $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+2\frac{a^2-b}{b^2}}} = \frac{b}{\sqrt{2a^2-b^2}}$.

11) Вернёмся к п.5.

$x = \frac{ab}{\sqrt{2a^2-b^2}}$

Ответ: $\frac{ab}{\sqrt{2a^2-b^2}}$

Вписанный шар

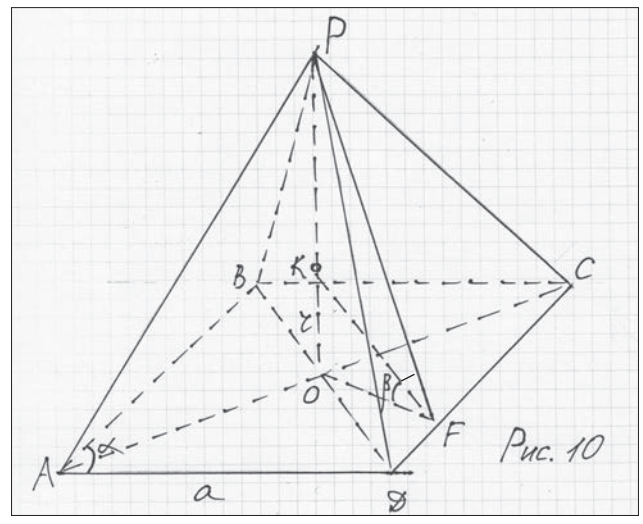
Определение. Шар называют вписанным в многогранник, если он касается всех граней многогранника.

Задача 7. Основание пирамиды — ромб со стороной a и острым углом α. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом β.

Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду (Рис.10)

Решение.

1)



PABCD — пирамида,
ABCD — ромб,
AB = a,
$\angle BAD = \alpha$, $\alpha < 90°$, $\angle(AB) = \ldots = \angle(DA) = \beta$.

$r_{вп.ш.}$ —?

2) Из условия задачи следует, что вершина P пирамиды проецируется в центр окружности, вписанной в основание пирамиды (множество точек M2). Для ромба центр вписанной окружности — точка пересечения диагоналей.

3) Проведём OF⊥CD. Тогда PF⊥CD по теореме о 3-х перпендикулярах. По определению линейного угла ∠PFO — линейный и по условию задачи $\angle PFO = \beta$.

4) С одной стороны, центр K вписанного шара принадлежит высоте PO пирамиды (такой факт имеет место для любой пирамиды, в которой боковые грани равнонаклонены к плоскости основания).

С другой стороны, центр K вписанного шара принадлежит биссектору двугранного угла с ребром CD; этот биссектор пересекает линейный угол PFO по биссектрисе FK. OK = r — радиус вписанного шара.

5) Радиус OF окружности, вписанной в ромб ABCD, вычислим по формуле

$OF = \frac{S_{ABCD}}{\frac{1}{2}P_{ABCD}} = \frac{a \cdot a \cdot \sin\alpha}{2a} = \frac{1}{2}a\sin\alpha$.

6) $\Delta OKF: \Sigma = OF \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}a\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$.

Ответ: $\frac{1}{2}a\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$.

Задача 8. Докажите, что

$r = \frac{3V}{S}$,

где r — радиус шара, вписанного в многогранник,
V — объём многогранника,
S — площадь поверхности многогранника.

Доказательство:

Соединим отрезками прямых центр вписанного шара со всеми вершинами многогранника и проведём радиусы в точки касания шара с гранями многогранника. Тогда многогранник разобьётся на столько пирамид, сколько граней в многограннике. Пусть многогранник имеет n граней с площадями $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

Будем иметь:

$V = \frac{1}{3}S_1 \cdot r + \frac{1}{3}S_2 \cdot r + \ldots + \frac{1}{3}S_n \cdot r = \frac{1}{3}r(S_1 + S_2 + \ldots + S_n) = \frac{1}{3}rS$.

Отсюда

$r = \frac{3V}{S}$.

Задача 9. Решим задачу 7, используя формулу, полученную в задаче 8. (Рис. 10)

Решение:

1) $r = \frac{3V}{S}$

2) Обозначим:
Q — площадь основания пирамиды,
H — высота пирамиды.

3) $S = Q + \frac{Q}{\cos\beta} = Q\left(1 + \frac{1}{\cos\beta}\right)$.

4) $r = \frac{3 \cdot \frac{1}{3}QH}{Q\left(1+\frac{1}{\cos\beta}\right)} = \frac{H\cos\beta}{1+\cos\beta}$.

5) $H = OF \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}a\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$.

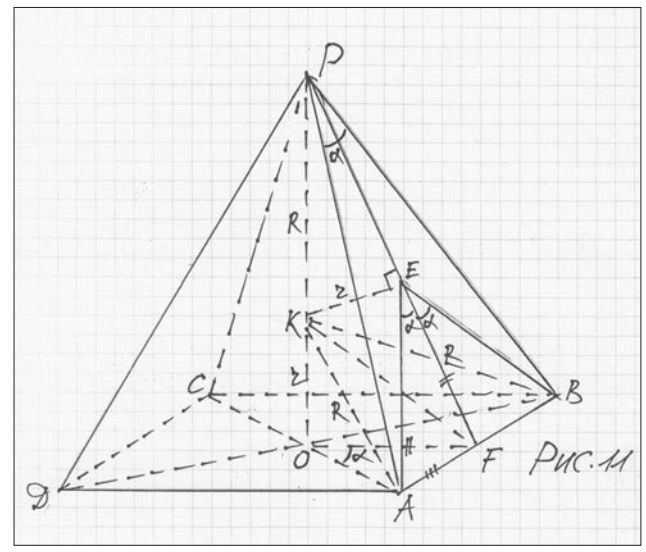
6) $r = \frac{\frac{1}{2}a\sin\alpha\operatorname{tg}\beta\cdot\cos\beta}{1+\cos\beta} = \frac{\frac{1}{2}a\sin\alpha\cdot\sin\beta}{1+\cos\beta} = \frac{\frac{1}{2}a\sin\alpha\cdot 2\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}}{2\cos^2\frac{\beta}{2}} = \frac{1}{2}a\sin\alpha\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}a\sin\alpha\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$.

Задача 10. В правильной 4-угольной пирамиде совпадают центры вписанного и описанного шаров.

Найдите плоский угол при вершине пирамиды. (Рис. 11)

Решение:



PABCD — правильная пирамида,
K — центр вписанного шара и центр описанного шара.

∠APB — ?

2) Проведём отрезки:

PF — апофему, OF, FK — биссектрису линейного угла PFO, KE⊥PF, KA, FB.

3) Так как K — центр описанного шара, то KA = KB = =KP = R — радиусы шара и точка K проецируется в центр E окружности, описанной вокруг ΔPAB; EP = EA= = EB — радиусы этой окружности.

4) Углы APB и AEB опираются на одну и ту же дугу; ∠APB — вписанный, ∠AEB — центральный.

Пусть $\angle APB = \alpha$, тогда $\angle AEB = 2\alpha$ и $\angle AEF = \alpha$.

5) ΔKEF = ΔKFO как прямоугольные, имеющие общую гипотенузу и равные катеты KE и KO.

Из равенства этих треугольников следует: FO = FE.

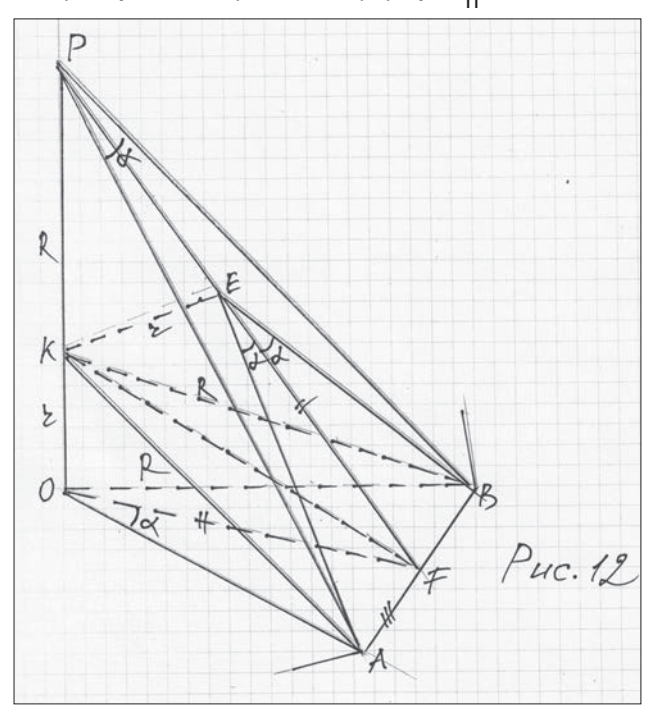
6) ΔAFO = ΔAFE как прямоугольные, имеющие общий катет AF и равные катеты FO и FE.

Тогда $\angle AEF = \angle AOF = \alpha$, но $\angle AOF = \frac{\pi}{4}$

Ответ: $\frac{\pi}{4}$

Замечание

Для правильной n-угольной пирамиды аналогичные рассуждения приводят к формуле $\frac{\pi}{n}$.



На рис. 12 показан фрагмент правильной n-угольной пирамиды; его обозначения полностью совпадают с обозначениями на рис. 10.

Александр ФЕЛЬДМАН,
учитель математики средней школы № 19
Минска.