
Фота носіць ілюстрацыйны характар.

Поиск оптимального решения одной олимпиадной задачи

В 2019 году на втором этапе Республиканской олимпиады по математике в 9 классе под номером 4 была предложена следующая задача:

"В трапеции ABCD основание AD в два раза длиннее каждой из остальных сторон. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Высота, проведенная из точки B, пересекает диагональ AC в точке K. Окружность, проходящая через точки K,O,B, пересекает сторону AB в точке F. Найти отношение AF : FB".

После проведения олимпиады в школы было дослано следующее решение этой задачи, возможно, выполненное автором.

Условно назовем его Р-1.

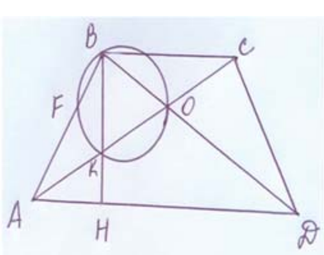

Рисунок 1.1.

Пусть AB = BC = CD = a, AD = 2a (рисунок 1.1.).

BH — высота, проведенная из вершины B.

Тогда $AH = \frac{(AD-BC)}{2} = \frac{a}{2}$.

Так как $AH = \frac{1}{2}AB$, то $\angle ABH = 30°$, $\angle BAH = 60°$, $\angle ABC = 120°$, $\angle BAC = \angle BCA = 30°$. Далее, $\angle OAD = \angle ODA = 60° - 30° = 30°$.

Тогда (из треугольника AOD) $\angle AOD = 120°$ и $\angle AOB = 180° - 120° = 60°$.

В треугольнике BHD: $\angle HBD = 90° - \angle ODA = 60°$.

В треугольнике KOB имеются два угла по 60° ($\angle KOB$ и $\angle KBO$), следовательно, данный треугольник равносторонний, т.е. BO = KO.

В равнобедренном треугольнике BOC с углом BOC, равным 120°, несложно получить, что $BO = \frac{BC}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Аналогично из равнобедренного треугольника AOD с углом AOD, равным 120°, несложно получить, что $AO = \frac{AD}{\sqrt{3}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Далее, $KO = BO = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

$AK = AO - KO = \frac{2a}{\sqrt{3}} - \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

По свойству секущих имеем

$AF \cdot AB = AK \cdot AO$,

$AF \cdot a = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}}$,

$AF = \frac{2}{3}a = \frac{2}{3}AB$, откуда легко получаем, что AF : FB = 2 : 1.

Ответ: AF : FB = 2 : 1.


Фота носіць ілюстрацыйны характар.

Считаю, что задача хорошая, но вот решение…

Когда я предложил группе моих девятиклассников решить указанную задачу, один из них нашел следующий способ.

Назовем этот способ Р-2.

Первая часть этого способа, когда доказывается, что углы ABH, BAC, BCA, CAD по 30°, почти совпадает с решением Р-1.

Далее в Р-1 доказывается, что треугольник BOK равносторонний.

Без этого можно обойтись. Достаточно доказать, что $\angle BOK = 60°$ (рисунок 2.1)

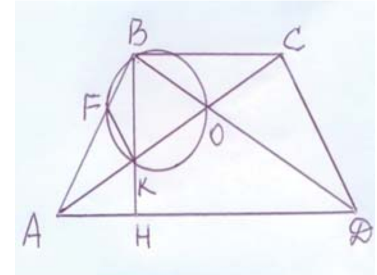

Рисунок 2.1.

Это можно сделать и так: $\angle BOK$ — внешний угол треугольника $\angle BOC$, и поэтому $\angle BOK = 30° + 30° = 60°$.

Этот угол BOK вписан в окружность, поэтому ◡BFK = 120°, $\angle FBK$, равный 30°, также вписан в эту окружность, поэтому ◡FK = 60°.

Тогда ◡FB = ◡BFK – ◡FK = 120° – 60° = 60°.

$\angle FKB$ как вписанный равен $\frac{1}{2}$◡FB = 30°.

Значит, треугольник KBF равнобедренный и FB = FK.

Далее, $\angle AFK$ внешний для треугольника KBF, и поэтому $\angle AFK = 2 \cdot 30° = 60°$.

Теперь заходим в треугольник AFK. В нем $\angle AFK = 60°$, $\angle FAK = 30°$, значит, он прямоугольный с углом 30°.

По свойству катета, лежащего напротив угла в 30°, $FK = \frac{1}{2}AF$, значит, $FB = \frac{1}{2}AF$, т.е. AF : FB = 2 : 1.

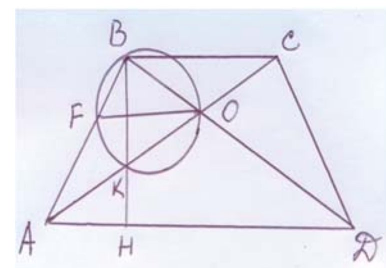

Рисунок 2.2.

Приведу еще один, на мой взгляд, вариант окончания решения этой задачи. Пусть это будет Р-3 (рисунок 2.2).

После того как доказано, что ◡FB = ◡FK, проводим отрезок OF. Тогда вписанные углы BOF и KOF равны. Тогда OF — биссектриса угла BOA треугольника BOA, у которого $\angle BAO = 30°$, $\angle BOA = 60°$, а значит, треугольник BOA — прямоугольный и катет $BO = \frac{1}{2}AO$.

Но по свойству биссектрисы AF : FB = AO : OB = 2 : 1.

Решение Р-4.

Данную задачу можно также решить через подобие треугольников.

(Вообще в этой задаче можно обнаружить много подобных треугольников).

Возьмем из группы подобных по двум углам 30° треугольников ΔABC и ΔFBK (рисунок 2.1). Составим пропорцию: $\frac{AB}{FB} = \frac{AC}{BK}$. Теперь AC выразим через BK. AC = AK + KC, но AK = KB, т.к. ΔAKB равнобедренный, а KC = 2KB, т.к. ΔKBC прямоугольный с углом KCB, равным 30°. Тогда AC = KB + 2KB = 3KB. Подставляем это в пропорцию и получим $\frac{AB}{FB} = \frac{3KB}{KB} = 3$. Значит AF : FB = 2 : 1.

Считаю, что в решениях Р-2, Р-3, Р-4 есть ряд преимуществ.

Первое — это то, что не нужно привлекать корни, которые, видимо, были получены через теорему Пифагора или тригонометрию прямоугольного треугольника (в Р-1 это не раскрыто). Второе — решение становится значительно короче, если не прибегать к свойству секущих.

Николай БРАНОВИЦКИЙ,
учитель математики Протасевичской средней школы Осиповичского района Могилёвской области.
Фота Надзеі ЦЕРАХАВАЙ.