Моделирование играет важную роль в обучении математике. В связи с этим на занятиях можно использовать разнообразные программы, приложения и пакеты. Рассмотрим примеры моделей задач и их решений по геометрии и алгебре с использованием программы Geogebra.

Моделирование математических задач в пакете Geogebra

Задача 1. *Для прямоугольника ABCD и точки X, расположенной в плоскости прямоугольника, докажите справедливость равенства* $XA^2 + XC^2 = XB^2 + XD^2$.

Данная задача может быть решена с помощью метода координат на плоскости, с введением системы координат. Необходимо построить модель расположения прямоугольника и системы координат:

1. На координатной плоскости ставим произвольную точку *C* и точку *X* в любой четверти с помощью инструмента "Точка".

2. Строим точки, симметричные точке *C (a;b)* относительно оси абсцисс, оси ординат и начала координат с помощью инструментов "Симметрия относительно точки", "Симметрия относительно прямой". Получаем точки *D,B,A*.

3. Проводим отрезки *AB, BC, CD, DA, XA, XB, XC,XD*.

Данный динамичный рисунок является визуализацией условия и начала решения данной задачи. Состояния модели представлены на рисунках 1—3. С помощью перемещения точек *C* и *X* можно получать различные положения прямоугольника.

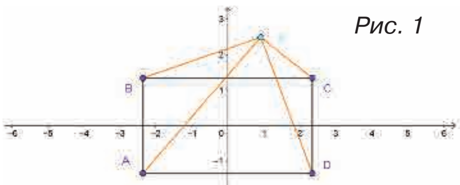


Рис. 1

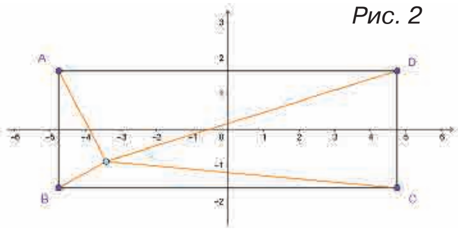


Рис. 2

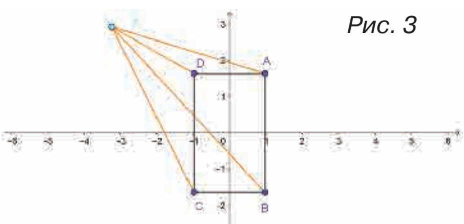


Рис. 3

Задача 2. *Докажите, что в треугольнике ABC для медианы BD выполнено неравенство* $BD < \frac{AB + BC}{2}$.

Решение данной задачи сводится к продлению медианы с целью получения параллелограмма. Нам необходимо построить модель чертежа, отражающую дополнительное построение. Для этого выполним следующее:

1. С помощью инструментов "Точка" и "Отрезок" ставим точки *A, B, C* и проводим отрезки *AB, BC, AC*.

2. С помощью инструмента "Середина или центр" ставим середину *D* отрезка *AC*. Отмечаем равные отрезки *AD = DC*. Проводим отрезок *BD* с помощью инструмента "Отрезок".

3. Проводим прямую *BD* с помощью инструмента "Прямая".

4. За точку *D* откладываем точку *Q* так, что *BD = DQ* с помощью инструмента "Симметрия относительно точки". Отмечаем равные отрезки *BD = DQ*.

5. Проводим отрезки *QA, QB, QC, QD* с помощью инструмента "Отрезок".

6. Скрываем прямую *BD*.

Различные состояния модели представлены на рисунках 4—5. Движение точек *A, B, C* определяет положение треугольника. Также ряд отрезков, которые не фиксировались в задаче, но были нам важны в решении, отмечены другим стилем отрезков.

Задача 3. *Пусть на плоскости даны точки M — середина отрезка AB и N — середина отрезка CD. Докажите равенство вида* $\overrightarrow{MN} = 0{,}5 \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

Построение модели условия задачи включает в себя следующие шаги:

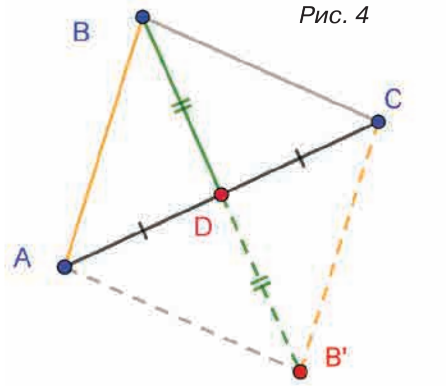


Рис. 4

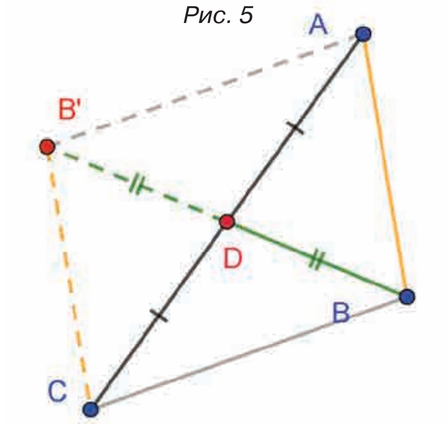


Рис. 5

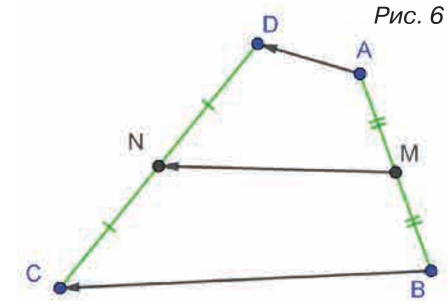


Рис. 6

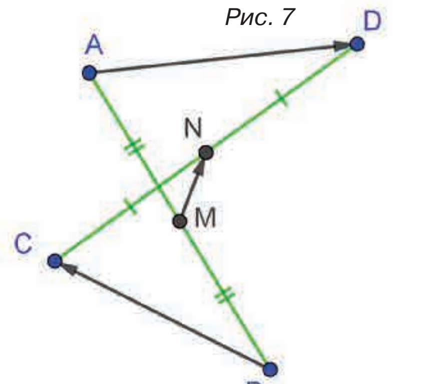


Рис. 7

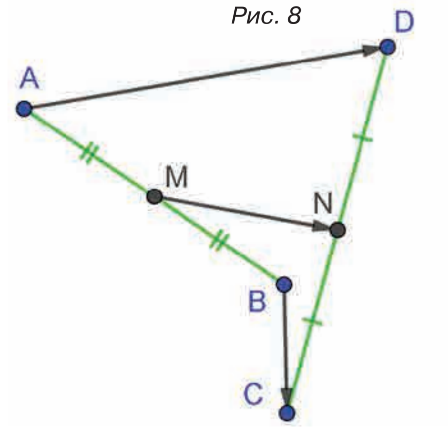


Рис. 8

1. С помощью инструментов "Точка" и "Отрезок" построим точки *A, B, C, D* и проведем отрезки *AB* и *CD*.

2. С помощью инструмента "Середина или центр" построим точки *M* — середину отрезка *AB* и *N* — середину отрезка *CD*.

3. С помощью инструмента "Вектор" построим векторы $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$.

Промежуточные состояния модели представлены на рисунках 6—8.

Задача 4. *Пусть заданы три вершины треугольника ABC в декартовой системе координат: A(0; 0), B(0; 3), C(4; 0). Определить площадь треугольника ABC.*

Решение данной задачи возможно несколькими способами. Построим модель расположения вершин треугольника *ABC* с помощью инструментов "Точка" и "Отрезок". Искомая статичная модель представлена на рисунке 9, причем точки *A, B, C* закреплены.

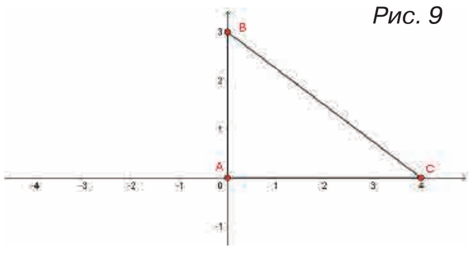


Рис. 9

Исходя из расположения вершин, можно сказать, что данный треугольник является прямоугольным. Его площадь равна $S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$.

Модели алгебраических задач в пакете Geogebra

Задача 1. *Решить графически уравнение* $|x| = x - 3$.

Алгоритм построения модели:

1. Используя строку ввода, вводим формулу $y = |x|$. В редакторе автоматически строится график функции $y = |x|$.

2. Используя строку ввода, вводим формулу $y = x - 3$. В редакторе автоматически строится график функции $y = x - 3$.

3. Используя инструмент "Пересечение", найти общие точки, если они есть.

Модель решения задачи представлена на рисунке 10. Видим, что общих точек нет. Значит, корней у данного уравнения также нет.

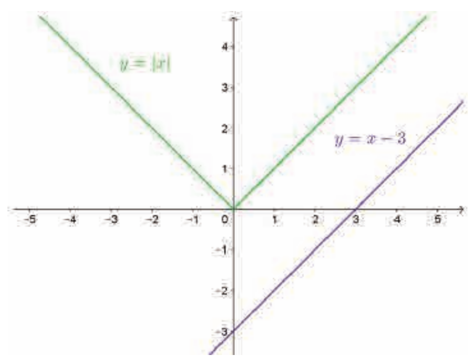


Рис. 10

Задача 2. *В группе 1500 человек. Из них 1000 человек умеют кататься на лыжах, 900 — на коньках. Ни на лыжах, ни на коньках не умеют кататься 100 человек. Сколько человек умеет кататься и на лыжах, и на коньках?*

Обозначим множество *A* — множество людей, которые умеют кататься на лыжах, а множество *B* — множество людей, которые умеют кататься на коньках. Исходя из заданных обозначений, можно построить вспомогательную модель для решения задачи с использованием кругов Эйлера:

1. Построим круг, внутри которого изобразим два пересекающихся круга, обозначающих множества *A* и *B*, используя инструмент "Окружность по центру и точке".

2. Скроем центры кругов и точки на окружностях.

3. Вставим надписи "Множество *A*", "Множество *B*", "2 вида", "Те, кто не умеет кататься ни на лыжах, ни на коньках" с помощью инструмента "Текст" (рисунок 11).

Полученная модель наглядно демонстрирует группы людей, которые даны по условию задачи. Она будет полезна учащимся при анализе условия и разбиении людей по группам.

Задача 3. *Найти множество значений функции* $y = x^2 - 2x + 2$.

Рассмотрим графическую модель, показывающую нахождение множества значений функции. Она основана на том, что проекция графика на ось ординат дает множество значений функции.

Рис. 11

1. Используя строку ввода, вводим формулу $y = x^2 - 2x + 2$. В редакторе автоматически строится график функции $y = x^2 - 2x + 2$.

2. Через каждую точку *C* графика проведем прямую, перпендикулярную оси ординат и пересекающую ее в некоторой точке *D*.

3. Множество всех таких точек *D* образует множество значений функции. Для этого для точки *D* выберем опцию "Оставить след", после чего проведем точкой *C* по графику.

Полученные промежуточные состояния модели изображены на рисунках 12—14.

Рис. 12

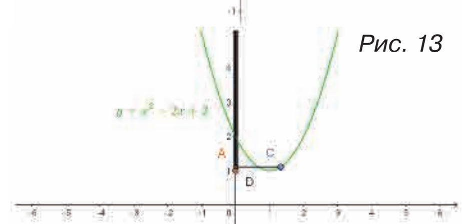


Рис. 13

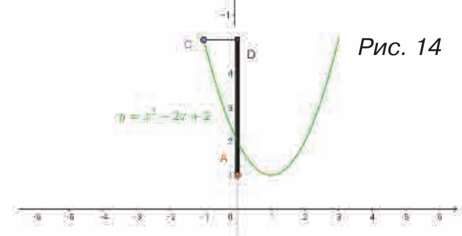


Рис. 14

Задача 4. *Решите уравнение* $|2x - 6| + |x^2 - 6x + 8| = 3$ *в действительных числах.*

Решение данной задачи опирается на метод разбиения на промежутки. Необходимо построить модель разбиения числовой прямой нулями подмодульных выражений. Для этого выполняются следующие шаги:

1. На числовой прямой ставятся нули подмодульных выражений с помощью инструмента "Точка".

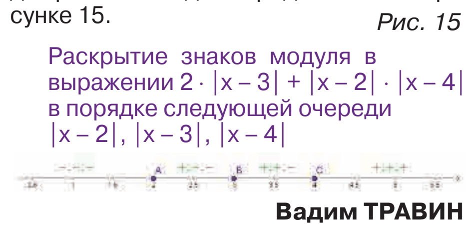
2. Определяются знаки модулей на полученных промежутках.

3. Ставятся надписи о знаках модулей на промежутках "–, –, –,", "+, –, –,", "+, +, –," и "+, +, +," с помощью инструмента "Текст".

4. Вводится текст о разбиении выражения согласно его знакам на промежутках с помощью инструмента "Текст", например, "Раскрытие знаков модуля в выражении $|2x - 6| + |x^2 - 6x + 8|$ в порядке следующей очереди $|x - 2|$, $|x - 3|$, $|x - 4|$".

Полученная вспомогательная модель для решения задачи представлена на рисунке 15.

Рис. 15



Вадим ТРАВИН, ассистент механико-математического факультета БГУ.